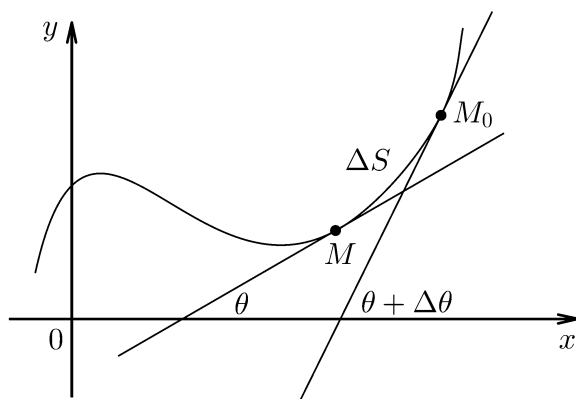


5 Zakrivljenost i torzija krive

Zakrivljenost ili krivina krive u ravni je veličina koja karakteriše stepen njenog odstupanja od prave u okolini neke tačke M . (Odstupanje čega?)



Pravac krive u tački M se može okarakterisati uglom θ koji gradi tangenta na krivu u tački M s osom $0x$ (vidi sliku). Brzina mjenjanja ugla θ pri ravnomjernom kretanju tačke M po krivoj naziva se krivina krive u tački M .

Torzija krive je brzina obrtanja oskulatorne ravni krive u tački A ako se tačka A kreće jedako (ravnomjerno) po krivoj brzinom jednakom jedinici. Na osnovu ove definicije postavlja se pitanje šta znači ako je torzija uvijek jednaka nuli.

Date definicije krivine i torzije su opisne definicije.

Krivinu krive ćemo označiti sa K a poluprečnik krivine sa $R = \frac{1}{K}$. Torziju ćemo označavati sa $\frac{1}{T}$ (ili sa $-\tau$) a poluprečnik torzije sa $|T|$.

Poluprečnik krivine R i krivina K su određeni relacijama

$$\frac{1}{K^2} = R^2 = \frac{|\dot{\vec{r}}|^2|^3}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} \quad \text{tj.} \quad R = \frac{|\dot{\vec{r}}|^3}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}$$

Vidimo da vrijedi i

$$K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$$

Poluprečnik torzije, $\pm T$, je dat formulom:

$$T = -\frac{[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]^2}{\dot{\vec{r}}[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]} = \frac{[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]^2}{\ddot{\vec{r}}[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]} = \frac{|\dot{\vec{b}}|^2}{\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{b}}}$$

Torziju ćemo označiti sa $\frac{1}{T}$ (a nekad i sa $-\tau$). Ako je u jednačini krive parametar t jednak dužini luka s , tada je

$$K = \frac{1}{R} = \left| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right| = |\vec{r}''|$$

$$-\tau = \frac{1}{T} = \pm \left| \frac{d\dot{\vec{b}}_0}{ds} \right|$$

67. Odrediti jedinične vektore tangente, glavne normale i binormale krive

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t.$$

Zatim naći krivinu i torziju date krive.

68. Pokazati da su kod krive

$$x = \operatorname{ch} z \quad y = \operatorname{sh} z$$

radijus krive i torzije (R i T) jednaki.

69. Naći poluprečnik torzije $|T|$ za krivu

$$\vec{r} = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \operatorname{sh} t \vec{k}.$$

70. Naći radijus krivine i krivinu krive

$$C : \begin{cases} x = \sin z - z \cos z \\ y = \cos z + z \sin z \end{cases}$$

u proizvoljnoj tački.

71. Napisati jednačinu skupa tačaka u kojima tangente zavojnice $\vec{r} = (a \cos t, a \sin t, bt)$ prodiru ravan $z = 0$. Odrediti zakrivljenost dobijene krive.

72. Izračunati torziju krive $\vec{r} = a(1 - \cos t, \sin 2t, 2 \cos t)$ u proizvoljnoj tački. Odrediti jednačinu ravni kojoj kriva pripada.

73. Data je kriva

$$L : y = \frac{1}{2m}x^2, z = \frac{1}{6m^2}x^3$$

gdje je m parametar nezavisan od x i y . Naći ortove prirodnog triedra, fleksiju i torziju krive L u tački za koju je $x = 2m$.

74. Data je kriva $\vec{r} = \left\{ \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}, \ln(\sin t) \right\}$. Odrediti ortove prirodnog triedra date krive. Odrediti fleksiju u proizvoljnoj tački krive.

75. Napisati jednačinu krive $\vec{r} = (a \cos t, a \sin t, bt)$ izrazivši \vec{r} kao funkciju argumenta s . Diferenciranjem po luku s naći jedinične vektore tangente, glavne normale i binormale krive u proizvoljnoj tački. Izračunati krivinu i torziju krive u proizvoljnoj tački.